

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Prof. M.A.Garms

UNIP - 2010

ELETRÔNICA EMBUTIDA

Com a revolução da Microeletrônica e a disseminação dos computadores, todas as áreas de aplicação da Engenharia Elétrica foram invadidas por equipamentos baseados em processadores digitais. Deste modo se evidenciou a criação de uma técnica com características próprias relacionada ao emprego específico de computadores que são incorporados de um modo quase “invisível” a produtos para os mais variados usos - a denominada Eletrônica Embutida (EE).

Como exemplos de produtos caracterizados pela utilização da técnica de EE em sua concepção pode-se citar: em Telecomunicações - celulares, pagers, roteadores, modems; em Instrumentação - osciloscópio digital, instrumentos virtuais; em Medicina - medidores de pressão arterial, monitores de glicemia; aparelhos de ecocardiograma; em Controle Industrial - sensores inteligentes, controle de fornos e de máquinas; em Processamento de Dados e Escritório - calculadoras, fax, copiadoras, scanners, impressoras; em Consumo e Eletrodomésticos - forno de microondas, máquinas de lavar, secretária eletrônica, TV digital, videogames; na Indústria automobilística - controle de transmissão, injeção eletrônica, freio ABS, suspensão ativa.

Nestes produtos é comum representar-se sistemas ou subsistemas por conjuntos de blocos de processamento de sinais (que realizam operações como, por exemplo, filtragem, integração, diferenciação, soma, subtração, produto, detecção de envoltória, retardo e outros) os quais atualmente em geral são implementados pela programação de processadores digitais. Nos primórdios da Eletrônica, blocos semelhantes a estes eram realizados exclusivamente por circuitos analógicos.

Esta tendência na digitalização de produtos deu origem a teorias que estenderam as ferramentas matemáticas usadas na análise de sinais contínuos para englobar o caso de sinais discretos. Veremos a seguir um exemplo importante de como isto ocorreu no campo das Telecomunicações.

AMOSTRAGEM DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Um processamento muito difundido em Telecomunicações é o da obtenção da composição harmônica senoidal de um sinal também denominada de espectro em frequência deste sinal.

A Transformada de Fourier é uma ferramenta matemática utilizada na análise espectral de sinais. Entretanto, sua definição original é estabelecida para sinais contínuos e de tempo contínuo ($t \in R$) o que leva a espectros de frequência contínua ($f \in R$).

A representação contínua em absoluto é o modo mais natural de se tratar um sinal em computadores: as amostras de um sinal correspondem a valores lidos em intervalos discretos no tempo ($t \in Z$). Além disto observa-se que é finito o tamanho de uma amostra o qual é limitado pelo próprio espaço de memória disponível no processador digital.

A seguir será feita uma introdução à passagem da Transformada de Fourier de tempo contínuo para a Transformada Discreta de Fourier visando sua aplicação em processadores digitais ou mais amplamente na EE.

Na Figura 1 apresentam-se um sinal $f(t)$ e sua correspondente Transformada de Fourier $F(\omega)$. Já foram estudadas as expressões para o cálculo de uma destas funções conhecida a outra:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

e

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

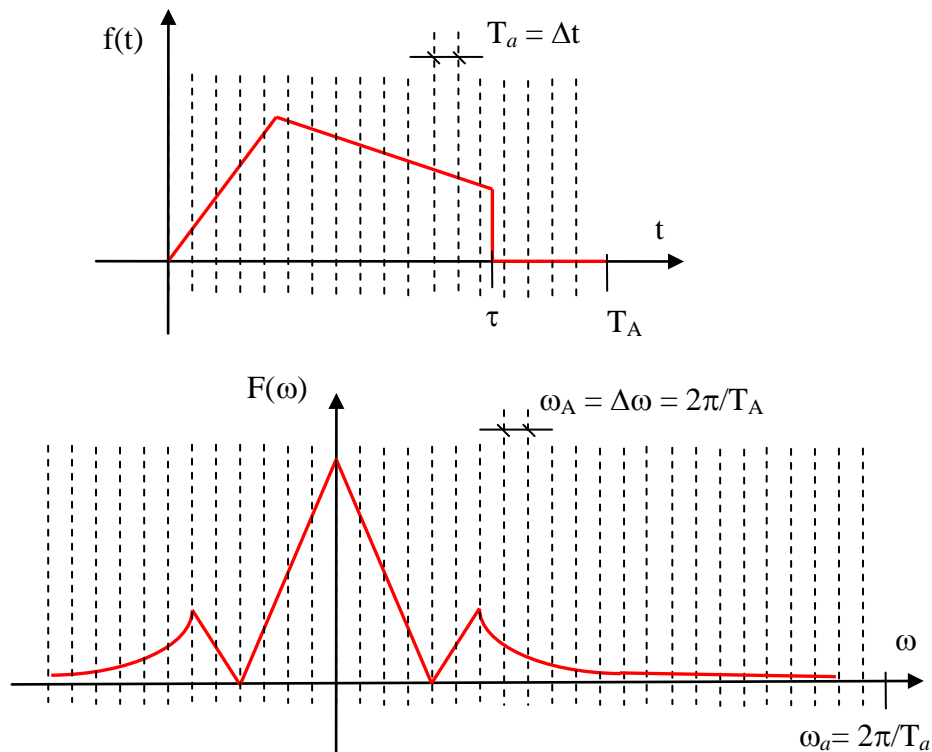


Figura 1 – Par $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

Para processamento digital deste sinal serão consideradas amostras de ambas as representações. Os instantes de amostragem são apresentados pelas linhas pontilhadas da Figura 1 e na qual também estão definidos os seguintes valores:

- (i) T_a – intervalo de tempo entre duas amostragens sucessivas de $f(t)$
- (ii) T_A – duração da Amostragem de $f(t)$
- (iii) ω_A – intervalo de frequência angular entre duas amostras sucessivas de $F(\omega)$
- (iv) ω_a – duração da amostragem de $F(\omega)$

A Transformada $F(\omega)$ de Fourier do sinal $f(t)$ da Figura 1 é dada por:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{T_A} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4)$$

Aproxima-se $F(\omega)$ substituindo a integral em (4) pela seguinte somatória:

$$F(\omega) \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a)e^{-j\omega(nT_a)}T_a \quad (5)$$

onde

$$N = \frac{T_A}{T_a} \quad (6)$$

é o número de elementos na amostra $f(nT_a)$: na expressão (5), $f(nT_a)$ é obtido do sinal $f(t)$ para os instantes de tempo discretos iguais a $t = nT_a$ e portanto corresponde a uma amostra deste sinal.

A amostragem do sinal $F(\omega)$ é obtida da expressão (5) sendo dada por:

$$F_m := F(m\omega_A) = F(\omega)|_{\omega=m\omega_A} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j(m\omega_A)(nT_a)} \quad (7)$$

onde

$$f_n := T_a f(nT_a) = T_a f(t)|_{t=nT_a} \quad (8)$$

Portanto, o número de elementos na amostra F_m resulta em:

$$N' = \frac{\omega_a}{\omega_A} = \frac{2\pi/T_a}{2\pi/T_A} = \frac{T_A}{T_a} \Rightarrow 0 \leq m \leq N'-1 \quad (9)$$

As relações $\omega_a = 2\pi/T_a$ e $\omega_A = 2\pi/T_A$, previamente assumidas na Figura 1, levam à igualdade no número de elementos das amostras F_m e f_n , isto é, $N' = N$, como pode ser verificado pelas expressões (6) e (9).

Assim os intervalos T_a e T_A podem ser usados para definir as resoluções desejadas para cada amostra: T_a define a resolução da amostra f_n de $f(t)$ e ω_A (ou $T_A = 2\pi/\omega_A$) a resolução da amostra F_m de $F(\omega)$. Contudo a relação $N=T_A/T_a$ determina o número de elementos para estas duas amostras.

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

Uma vez que T_a e T_A são preestabelecidos então pode-se dizer que o produto $\omega_A T_a = 2\pi T_a / T_A = 2\pi / N$, na expressão (7), é fixo ao longo dos demais cálculos. Nestas condições, define-se a frequência angular fundamental (relativa ao período N) como sendo igual a:

$$\Omega = 2\pi / N = \omega_A T_a \quad (10)$$

Substituindo-se (10) em (7), obtém-se:

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-jm\Omega n} \quad (11)$$

A função F_m na expressão (11) é então denominada Transformada Discreta de Fourier (DFT) da função f_n .

Em resumo as grandezas / expressões envolvidas na DFT são as seguintes:

$$\begin{aligned} f_n &= T_a f(nT_a); \\ F_m &= F(m\omega_A); \\ \omega_A &= 2\pi / T_A; \quad \omega_a = 2\pi / T_a; \\ N &= T_A / T_a; \quad \Omega = 2\pi / N \end{aligned}$$

TRANSFORMADA DISCRETA INVERSA DE FOURIER (IDFT)

A comparação da Transformada Contínua de Fourier $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ e de sua inversa $f(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$ com a expressão (11) induz a seguinte tentativa para a transformação inversa de (11) (de F_m para f_n):

$$f_n = C \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{jn\Omega m} \quad (12)$$

sendo C uma constante a determinar.

A função f_n na expressão (12) é então denominada Transformada Discreta Inversa de Fourier (IDFT) da função F_m .

Pode-se verificar se a IDFT proposta é consistente substituindo-se (12) em (11):

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} \left[C \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jn\Omega k} \right] e^{-jm\Omega n} = C \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jn\Omega k} e^{-jm\Omega n} \quad (13)$$

Trocando-se a ordem das somatórias e colocando-se F_k em evidencia resulta:

$$F_m = C \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} F_k e^{j(k-n)\Omega n} = C \sum_{k=0}^{N-1} F_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-n)\Omega n} \quad (14)$$

A segunda somatória corresponde a uma PG de razão r dada por:

$$r = e^{j(k-m)\Omega} \Rightarrow F_m = C \sum_{k=0}^{N-1} F_k \sum_{n=0}^{N-1} r^n \quad (15)$$

Existem duas condições para realizar o cálculo da somatória desta PG:

$$(i) k = m \Rightarrow r = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} r^n = N$$

$$(ii) k \neq m \Rightarrow r \neq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{r^N - 1}{r - 1} = \frac{e^{j(k-m)\Omega N} - 1}{r - 1} \stackrel{(10)}{=} \frac{e^{j(k-m)2\pi} - 1}{r - 1} = 0$$

Isto é, se $k = m$ a somatória vale N e se $k \neq m$ ela vale 0 . Usando o símbolo de Kronecker δ_{km} , definido como sendo 1 se $k = m$ e 0 se $k \neq m$, é possível condensar os dois resultados anteriores numa única expressão:

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = N \delta_{km} \quad (16)$$

Finalmente de (15) e (16) obtém-se:

$$F_m = C \sum_{k=0}^{N-1} F_k N \delta_{km} = C F_m N \Rightarrow C = \frac{1}{N} \quad (17)$$

De (17) conclui-se que se aplicando a antitransformada discreta de Fourier numa função F_m e a seguir aplicando-se a transformada discreta de Fourier no resultado obtém-se novamente a função original F_m como deveria ser.

PERIODICIDADE DAS TRANSFORMAÇÕES DISCRETAS DE FOURIER

As expressões que definem estas transformações, $F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-jm\Omega n} \leftrightarrow f_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{jn\Omega m}$,

são periódicas de período N . Prova:

$$m \rightarrow m + N \Rightarrow e^{jm\Omega n} \rightarrow e^{j(m+N)\Omega n} = e^{jm\Omega n + N\Omega n} \stackrel{10}{=} e^{jm\Omega n} e^{j2\pi n} = e^{jm\Omega n}$$

e

$$n \rightarrow n + N \Rightarrow e^{jn\Omega m} \rightarrow e^{j(n+N)\Omega m} = e^{jn\Omega m + m\Omega N} \stackrel{10}{=} e^{jn\Omega m} e^{j2\pi m} = e^{jn\Omega m}$$

Portanto, os períodos de repetição de F_m e de f_n serão respectivamente iguais à:

$$T_{F_m} = N\omega_A = \frac{T_A}{T_a} \frac{2\pi}{T_a} = \frac{2\pi}{T_a} = \omega_a \text{ e } T_{f_n} = NT_a = \frac{T_A}{T_a} T_a = T_A$$

Este resultado é apresentado na Figura 2.

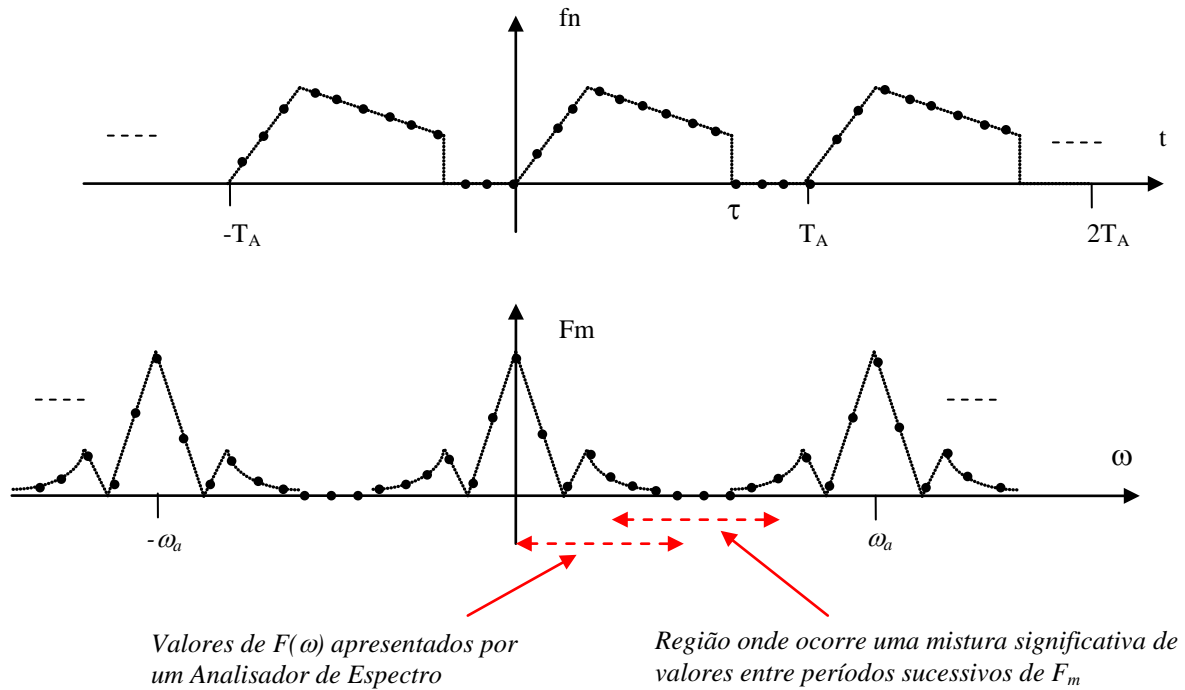


Figura 2 – Funções amostradas de $f(t)$ e de $F(\omega)$.

Um efeito “não desejado” ocorre na função F_m devido a esta periodicidade. Pode-se mostrar que para um sinal $f(t)$ limitado em t a sua TF não é limitada em ω e que, portanto os valores dos diversos períodos de F_m apresentados na Figura 2 irão se misturar (principalmente em torno de $\omega_a/2$).

No entanto, como $F(\omega)$ tende assintoticamente para zero com $\omega \rightarrow \infty$, é possível escolher T_a de modo a aumentar o período de F_m (Figura 2) e minimizar a interferência entre os períodos sucessivos desta transformada.

COMENTÁRIO FINAL

Embora esta introdução histórica faça uma ponte do caso contínuo para o caso discreto da transformada de Fourier atualmente a DFT é definida e tratada de modo independente na análise de sinais discretos e sob este ponto de vista o problema discutido anteriormente deixa de existir (ele só tem sentido quando se considera a DFT como aproximação da TF).

```

Private Sub spec_Click()
' Algoritmo para calculo da DFT por MAG em 02/2010

Dim i, k, n, f As Integer
Dim x As Variant
Dim a(1200), h(1200) As Double
Dim real_, imag_ As Double

i = 0
For Each x In Sheets(3).Range("B2:B1025")
  a(i) = x.Value
  i = i + 1
Next

'converte dominio frequencia - algoritmo direto: dft (nao fft)

' janela triangular
For i = 1 To 1023
  w = (i - 512) / 512
  If w < 0 Then w = -w
  w = 0          janela retangular
  a(i) = 2 * a(i) * (1 - w)
Next

f = Sheets(3).Range("N1").Value / 4
For k = 0 To 512                                     ' DFT
  real_ = 0
  imag_ = 0
  For n = 0 To 1024
    x = 2 * 3.1415926535 * k * n / 1024
    real_ = real_ + a(n) * Cos(x)
    imag_ = imag_ - a(n) * Sin(x)
    h(k) = ((real_ * real_ + imag_ * imag_) ^ 0.5) / f
  Next
Next
h(0) = h(0) / 2

i = 0
For Each x In Sheets(3).Range("M2:M1025")
  x.Value = h(i)
  i = i + 1
Next

End Sub

```


Microsoft Excel - spec2

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda OmniPage Adobe PDF mostrar formulas

B3 1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	frq	quadrada	serra	AM		1/2 onda	fase		triangular	fase					
2	0,00						0			0					
3	100,00	1,00	1,00	0,00		0,79	1,570796		1,8	1,570796					
4	200,00	0,00	0,50	0,00		0,33	1,570796		0	1,570796					
5	300,00	0,33	0,33	0,00		0,00	1,570796		0,2	1,570796					
6	400,00	0,00	0,25	0,00		-0,07	1,570796		0	1,570796					
7	500,00	0,20	0,20	0,00		0,00	1,570796		0,07	1,570796					
8	600,00	0,00	0,16	0,00		0,03	1,570796		0	1,570796					
9	700,00	0,14	0,14	0,40		0,00	1,570796		0,04	1,570796					
10	800,00	0,00	0,13	1,00		-0,02	1,570796		0	1,570796					
11	900,00	0,11	0,11	0,40		0,00	1,570796		0,02	1,570796					
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															
21															
22															
23															
24															
25															
26															
27															
28															
29															
30															
31															
32															
33															
34															
35															

padroes / Osc_Spec / amostras / sinal /

Desenhar AutoFormas

Pronto Soma=1,78 NÚM

Microsoft Wind... DFT1 - Microsof... simul Microsoft Excel ... Microsoft Visual ... PT 10:10

Microsoft Excel - spec2

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda OmniPage Adobe PDF mostrar formulas

100% Arial 10

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	frq	padrão	A	fase											
2	0,00		0,00	0											
3	100,00	1,00	1,00	0											
4	200,00	0,00	0,00	0											
5	300,00	0,33	0,33	0											
6	400,00	0,00	0,00	0											
7	500,00	0,20	0,20	0											
8	600,00	0,00	0,00	0											
9	700,00	0,14	0,14	0											
10	800,00	0,00	0,00	0											
11	900,00	0,11	0,11	0											
12															
13	ganho	1,00	DC	0,00											
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															
21															
22															
23															
24															
25															
26															
27															
28															
29															
30															
31															
32															
33															
34															
35															

padroes Osc_Spec amostras sinal

Desenhar AutoFormas

Pronto NÚM

Microsoft Wind... DFT1 - Microsof... simul Microsoft Excel ... Microsoft Visual ... PT 10:10

	A	B	C	L	M	N
1	t	s	a1	a10	0,0005	=#M1
2	=0	=SOMA(C2:L2)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A2+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A2+Osc_Spec\$D\$11)	0,0000864591210915	=((\$N\$1*0,5^02)/512)
3	=A2+\$M\$1	=SOMA(C3:L3)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A3+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A3+Osc_Spec\$D\$11)	0,000024835848084	=((\$N\$1*0,5^03)/512)
4	=A3+\$M\$1	=SOMA(C4:L4)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A4+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A4+Osc_Spec\$D\$11)	0,000174635728904	=((\$N\$1*0,5^04)/512)
5	=A4+\$M\$1	=SOMA(C5:L5)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A5+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A5+Osc_Spec\$D\$11)	0,0000251395129112	=((\$N\$1*0,5^05)/512)
6	=A5+\$M\$1	=SOMA(C6:L6)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A6+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A6+Osc_Spec\$D\$11)	0,000179800938245	=((\$N\$1*0,5^06)/512)
7	=A6+\$M\$1	=SOMA(C7:L7)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A7+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A7+Osc_Spec\$D\$11)	0,000025754645160	=((\$N\$1*0,5^07)/512)
8	=A7+\$M\$1	=SOMA(C8:L8)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A8+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A8+Osc_Spec\$D\$11)	0,000188460672923	=((\$N\$1*0,5^08)/512)
9	=A8+\$M\$1	=SOMA(C9:L9)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A9+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A9+Osc_Spec\$D\$11)	0,000026697496403	=((\$N\$1*0,5^09)/512)
10	=A9+\$M\$1	=SOMA(C10:L10)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A10+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A10+Osc_Spec\$D\$11)	0,000200719209339	=((\$N\$1*0,5^010)/512)
11	=A10+\$M\$1	=SOMA(C11:L11)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A11+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A11+Osc_Spec\$D\$11)	0,000027994107957	=((\$N\$1*0,5^011)/512)
12	=A11+\$M\$1	=SOMA(C12:L12)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A12+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A12+Osc_Spec\$D\$11)	0,000216771655269	=((\$N\$1*0,5^012)/512)
13	=A12+\$M\$1	=SOMA(C13:L13)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A13+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A13+Osc_Spec\$D\$11)	0,000029682458808	=((\$N\$1*0,5^013)/512)
14	=A13+\$M\$1	=SOMA(C14:L14)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A14+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A14+Osc_Spec\$D\$11)	0,000236943369348	=((\$N\$1*0,5^014)/512)
15	=A14+\$M\$1	=SOMA(C15:L15)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A15+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A15+Osc_Spec\$D\$11)	0,0000318156320621	=((\$N\$1*0,5^015)/512)
16	=A15+\$M\$1	=SOMA(C16:L16)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A16+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A16+Osc_Spec\$D\$11)	0,000261735339412	=((\$N\$1*0,5^016)/512)
17	=A16+\$M\$1	=SOMA(C17:L17)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A17+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A17+Osc_Spec\$D\$11)	0,000034466364136	=((\$N\$1*0,5^017)/512)
18	=A17+\$M\$1	=SOMA(C18:L18)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A18+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A18+Osc_Spec\$D\$11)	0,000291879892531	=((\$N\$1*0,5^018)/512)
19	=A18+\$M\$1	=SOMA(C19:L19)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A19+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A19+Osc_Spec\$D\$11)	0,000037733579485	=((\$N\$1*0,5^019)/512)
20	=A19+\$M\$1	=SOMA(C20:L20)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A20+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A20+Osc_Spec\$D\$11)	0,000328415417888	=((\$N\$1*0,5^020)/512)
21	=A20+\$M\$1	=SOMA(C21:L21)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A21+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A21+Osc_Spec\$D\$11)	0,000041751893999	=((\$N\$1*0,5^021)/512)
22	=A21+\$M\$1	=SOMA(C22:L22)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A22+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A22+Osc_Spec\$D\$11)	0,000372793669340	=((\$N\$1*0,5^022)/512)
23	=A22+\$M\$1	=SOMA(C23:L23)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A23+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A23+Osc_Spec\$D\$11)	0,000046705697550	=((\$N\$1*0,5^023)/512)
24	=A23+\$M\$1	=SOMA(C24:L24)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A24+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A24+Osc_Spec\$D\$11)	0,000427040606643	=((\$N\$1*0,5^024)/512)
25	=A24+\$M\$1	=SOMA(C25:L25)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A25+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A25+Osc_Spec\$D\$11)	0,000052850501282	=((\$N\$1*0,5^025)/512)
26	=A25+\$M\$1	=SOMA(C26:L26)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A26+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A26+Osc_Spec\$D\$11)	0,000494004763820	=((\$N\$1*0,5^026)/512)
27	=A26+\$M\$1	=SOMA(C27:L27)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A27+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A27+Osc_Spec\$D\$11)	0,000060546150414	=((\$N\$1*0,5^027)/512)
28	=A27+\$M\$1	=SOMA(C28:L28)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A28+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A28+Osc_Spec\$D\$11)	0,000577751309038	=((\$N\$1*0,5^028)/512)
29	=A28+\$M\$1	=SOMA(C29:L29)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A29+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A29+Osc_Spec\$D\$11)	0,000070310058458	=((\$N\$1*0,5^029)/512)
30	=A29+\$M\$1	=SOMA(C30:L30)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A30+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A30+Osc_Spec\$D\$11)	0,000684206274436	=((\$N\$1*0,5^030)/512)
31	=A30+\$M\$1	=SOMA(C31:L31)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A31+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A31+Osc_Spec\$D\$11)	0,0000829054999035	=((\$N\$1*0,5^031)/512)
32	=A31+\$M\$1	=SOMA(C32:L32)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A32+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A32+Osc_Spec\$D\$11)	0,000822247689747	=((\$N\$1*0,5^032)/512)
33	=A32+\$M\$1	=SOMA(C33:L33)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A33+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A33+Osc_Spec\$D\$11)	0,000099494001843	=((\$N\$1*0,5^033)/512)
34	=A33+\$M\$1	=SOMA(C34:L34)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A34+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A34+Osc_Spec\$D\$11)	0,001005633483477	=((\$N\$1*0,5^034)/512)
35	=A34+\$M\$1	=SOMA(C35:L35)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A35+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A35+Osc_Spec\$D\$11)	0,0001219110569190	=((\$N\$1*0,5^035)/512)
36	=A35+\$M\$1	=SOMA(C36:L36)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A36+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A36+Osc_Spec\$D\$11)	0,001256585888072	=((\$N\$1*0,5^036)/512)
37	=A36+\$M\$1	=SOMA(C37:L37)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A37+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A37+Osc_Spec\$D\$11)	0,000153193788779	=((\$N\$1*0,5^037)/512)
38	=A37+\$M\$1	=SOMA(C38:L38)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A38+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A38+Osc_Spec\$D\$11)	0,001612877662359	=((\$N\$1*0,5^038)/512)
39	=A38+\$M\$1	=SOMA(C39:L39)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A39+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A39+Osc_Spec\$D\$11)	0,000198662644823	=((\$N\$1*0,5^039)/512)
40	=A39+\$M\$1	=SOMA(C40:L40)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A40+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A40+Osc_Spec\$D\$11)	0,002142963254963	=((\$N\$1*0,5^040)/512)
41	=A40+\$M\$1	=SOMA(C41:L41)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A41+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A41+Osc_Spec\$D\$11)	0,000268837134663	=((\$N\$1*0,5^041)/512)
42	=A41+\$M\$1	=SOMA(C42:L42)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A42+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A42+Osc_Spec\$D\$11)	0,002981545307978	=((\$N\$1*0,5^042)/512)
43	=A42+\$M\$1	=SOMA(C43:L43)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A43+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A43+Osc_Spec\$D\$11)	0,000382959969339	=((\$N\$1*0,5^043)/512)
44	=A43+\$M\$1	=SOMA(C44:L44)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A44+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A44+Osc_Spec\$D\$11)	0,004424531797775	=((\$N\$1*0,5^044)/512)
45	=A44+\$M\$1	=SOMA(C45:L45)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A45+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A45+Osc_Spec\$D\$11)	0,000591476815628	=((\$N\$1*0,5^045)/512)
46	=A45+\$M\$1	=SOMA(C46:L46)	=Osc_Spec\$C\$2*COS(2*PI()*Osc_Spec\$A\$2*A46+Osc_Spec\$D\$2)	=Osc_Spec\$C\$11*SEN(2*PI()*Osc_Spec\$A\$11*A46+Osc_Spec\$D\$11)	0,00723124689587	=((\$N\$1*0,5^046)/512)